

Gruppenübung 10

Aufgabe 1 Wir betrachten ein allgemeines lineares zeit-invariantes System, d.h. ein System gegeben durch

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, und $D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$.

- a) Angenommen das lineare System hat einen relativen Grad $r \in \mathbb{N}_0$. Charakterisieren Sie den differentiellen relativen Grad r_d durch algebraische Bedingungen in Abhängigkeit von A, B, C, D (d.h. berechnen Sie die Lieableitungen $L_f^k h$ für $k = 0, \dots, r-1$ und wenden Sie die Definition für den relativen Grad an).

Lösung:

Im Fall eines linearen Systems gilt $f(x) = Ax$, $g(x) = B$ und $h(x) = Cx$. Ist $D \neq 0$ so ist der relative Grad des Systems 0. Ist $D = 0$ so berechnet man den differentiellen relativen Grad über die Lieableitungen. D.h.

$$L_f^k h(x) = CA^k x$$

$$L_g L_f^k h(x) = CA^k B.$$

Im Falle eines differentiellen relativen Grades von r_d gilt also

$$CA^k B = 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, r_d - 2\}$$

$$CA^{r_d-1} B \neq 0.$$

- b) Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem differentiellen relativen Grades eines linearen Systems und dem relativen Grad als Differenz zwischen dem Nennergrad und dem Zählergrad der zugehörigen Übertragungsfunktion.

Lösung:

Beim differentiellen relativen Grad prüft man welche Ableitung des Ausgangs sprungfähig ist. D.h. man regt das System mit einem Sprung $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an und prüft welche Ableitung von y eine Unstetigkeitsstelle in 0 hat.

Um das ganze zu formalisieren benötigen wir den Anfangswertsatz. D.h., ist $F = \mathcal{L}[f]$ die Laplace transformierte einer Funktion f so dass f' für alle $t > 0$ existiert und eine Laplace transformierte $\mathcal{L}[f']$ besitzt. Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s).$$

Wir betrachten $\lim_{t \rightarrow 0^+} y^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} y(t)|_{t \rightarrow 0^+}$ für ein lineares System $G(s)$ das mit $H \bullet \rightarrow h$ angeregt wird. Nun ist $H(s) = \frac{1}{s}$, d.h. $Y(s) := \frac{G(s)}{s}$. Es gilt (unter passenden Annahmen an die Existenz von Ableitungen von y)

$$\frac{d^k}{dt^k} y(t) \bullet \rightarrow s^k Y(s).$$

D.h. aus dem Grenzwertsatz folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y^{(k)}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s)(s^k Y(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^k G(s). \quad (1)$$

Sei der relative Grad des Systems r , dann können wir G schreiben als

$$\begin{aligned} G(s) &= c \frac{s^{n-r} + q_{n-r-1}s^{n-r-1} + \dots + q_1 s + q_0}{s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0} \\ &= \frac{1}{s^r} c \underbrace{\frac{s^n + q_{n-r-1}s^{n-1} + \dots + q_1 s^{r+1} + q_0 s^r}{s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0}}_{:= \tilde{G}(s)} \end{aligned}$$

wobei $\overline{G}(s)$ relativen Grad Null hat, also $\lim_{s \rightarrow \infty} \overline{G}(s) = c \in \mathbb{R}$.

Sei nun $k < r$, dann ist wegen (1) und dem eben gesagten $\lim_{t \rightarrow 0^+} y^{(k)}(t) = 0$. Ist $k = r$, so ist $\lim_{t \rightarrow 0^+} y^{(r)}(t) = c$. Gilt umgekehrt $\lim_{t \rightarrow 0^+} y^{(k)}(t) = 0$ für alle $k < r$ und $\lim_{t \rightarrow 0^+} y^{(r)}(t) = c$, so folgt unmittelbar, dass der relative Grad r ist. Insgesamt ist damit gezeigt, dass der differentielle relative Grad und der relative Grad gleich sind.

- c) Zeigen Sie, dass der relative Grad invariant gegenüber Koordinatentransformationen ist (d.h. führen Sie neue Koordinaten z mit $x = Tz$, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det T \neq 0$ ein und betrachten Sie das System in den Koordinaten z).

Lösung:

Die Systemgleichungen in den neuen Koordinaten sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y &= CTz + Du.\end{aligned}$$

Setze $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$, $\tilde{C} = CT$. Für $D \neq 0$ ändert sich der relative Grad nicht. Sei also $D = 0$. Dann ergibt sich aus a)

$$\begin{aligned}\tilde{C}\tilde{A}^k\tilde{B} &= 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, r-2\} \\ \tilde{C}\tilde{A}^{r-1}\tilde{B} &\neq 0.\end{aligned}$$

Weil nun $\tilde{A}^k = (T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\tilde{C}\tilde{A}^k\tilde{B} &= CTT^{-1}A^kTT^{-1}B = CA^k B = 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, r-2\} \\ \tilde{C}\tilde{A}^{r-1}\tilde{B} &= CTT^{-1}A^{r-1}TT^{-1}B = CA^{r-1}B \neq 0.\end{aligned}$$

Damit ändert sich der relative Grad für das transformierte System nicht.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie für die folgenden Systeme den relativen Grad. Geben Sie an, ob dieser wohldefiniert ist.

a)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{(s+1)(s^2-2s+1)},$$

wobei $u(t) \bullet \circ U(s)$ und $y(t) \bullet \circ Y(s)$.

Lösung:

Der relative Grad r ergibt sich aus der Differenz des Grades des Nennerpolynoms und des Grades des Zählerpolynoms, also $r = 2$. Der relative Grad ist wohldefiniert.

b)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2^2 + x_1^2 u \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(x)}{\partial x} &= (1 \quad 0) \\ L_g h(x) &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = 0 \\ L_f h(x) &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_2^2 \end{pmatrix} = x_2 \\ L_g L_f h(x) &= \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} g(x) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = x_1^2.\end{aligned}$$

Das System hat also relativen Grad $r = 2$, wobei dieser nicht wohldefiniert ist (für $x_1 = 0$ ist $L_g L_f h(x) = 0$).

c)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3(1+x_1^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{x}_3 &= 1-x_1^3+u \\ y &= x_2.\end{aligned}$$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(x)}{\partial x} &= (0 \quad 1 \quad 0) \\ L_g h(x) &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ L_f h(x) &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_3(1+x_1^2) \\ x_1 \\ 1-x_1^3 \end{pmatrix} = x_1 \\ L_g L_f h(x) &= \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} g(x) = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ L_f^2 h(x) &= \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} f(x) = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} x_3(1+x_1^2) \\ x_1 \\ 1-x_1^3 \end{pmatrix} = x_3(1+x_1^2) \\ L_g L_f^2 h(x) &= \frac{\partial L_f^2 h(x)}{\partial x} g(x) = (2x_1x_3 \quad 0 \quad 1+x_1^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1+x_1^2.\end{aligned}$$

Damit hat das System relativen Grad $r = 3$ und weil $1+x_1^2 \neq 0$ gilt ist dieser wohldefiniert.

Aufgabe 3 In Abbildungen 3 sind die Sprungantworten für vier Systeme dargestellt. Bestimmen Sie jeweils den relativen Grad.

Lösung:

Das System (a) ist sprungfähig da $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = -1$. Deswegen ist der relative Grad $r = 0$.

Das System (b) ist nicht sprungfähig da $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0$, allerdings ist $\lim_{t \rightarrow 0^+} y^{(1)}(t) > 0$, deswegen ist der relative Grad $r = 1$.

Das System (c) ist nicht sprungfähig da $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0$. Des Weiteren ist $\lim_{t \rightarrow 0^+} y^{(1)}(t) = 0$, deswegen ist der relative Grad $r \geq 2$.

Das System (d) ist nicht sprungfähig da $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0$. Des Weiteren ist $\lim_{t \rightarrow 0^+} y^{(1)}(t) \neq 0$, deswegen ist der relative Grad $r = 1$.

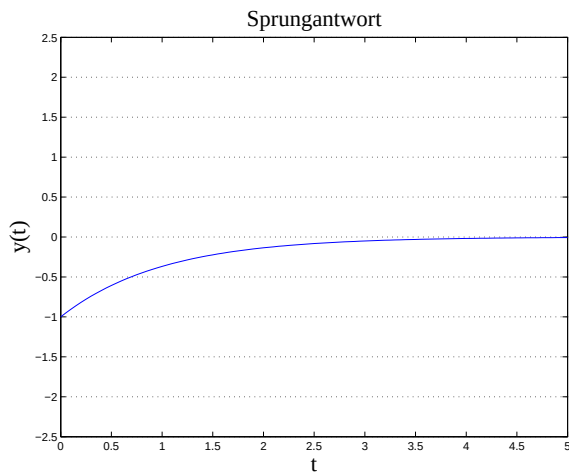
Aufgabe 4 Gegeben sei das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2^2 \\ x_2^3 - x_1 x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

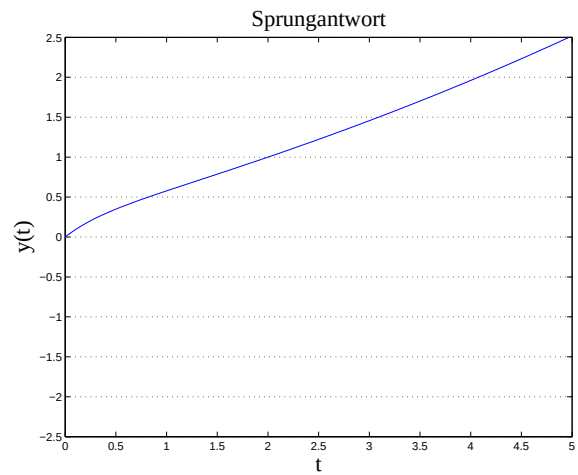
$$y = x_3.$$

a) Bestimmen Sie den relativen Grad des Systems.

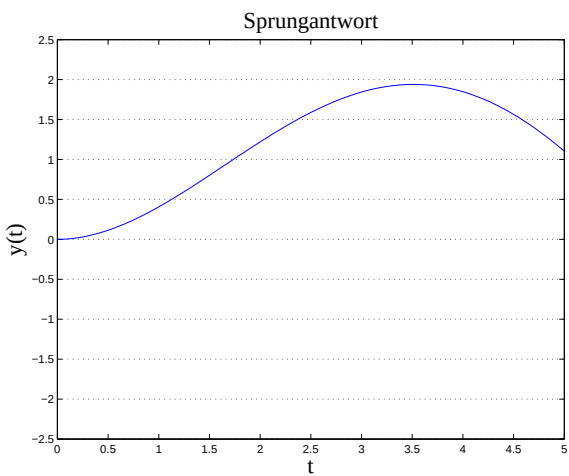
Lösung:



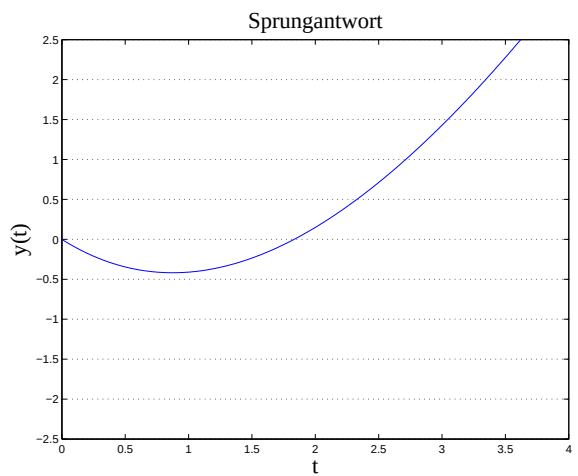
(a) Sprungantwort



(b) Sprungantwort



(c) Sprungantwort



(d) Sprungantwort

Abbildung 1: Sprungantworten von vier Systemen

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} -x_1 + x_2^2 \\ x_2^3 - x_1 x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1$$

$$\frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} = (1 \quad 0 \quad 0)$$

$$L_g L_f h(x) = 1.$$

Damit ist der relative Grad $r = 2$.

- b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation Φ die das System auf Byrnes-Isidori-Normalform transformiert.

Lösung:

$$\begin{aligned}z_1 &= h(x) = x_3 \\z_2 &= L_f h(x) = x_1 \\z_3 &= x_2 \text{ frei wählbar.}\end{aligned}$$

Die inverse Transformation ergibt sich zu

$$\begin{aligned}x_1 &= z_2 \\x_2 &= z_3 \\x_3 &= z_1.\end{aligned}$$

- c) Ist die Transformation ein globaler Diffeomorphismus?

Lösung:

Im vorliegenden Fall ist die Abbildung linear und invertierbar. Die Inverse einer linearen Abbildung ist (wenn sie existiert) wieder linear. Da lineare Abbildungen immer global definiert und glatt sind, ist eine Transformation, die durch eine invertierbare lineare Abbildung beschrieben wird, immer ein globaler Diffeomorphismus.

- d) Schreiben Sie das System in z -Koordinaten. Geben Sie an ob das transformierte System eingangsnormalisiert ist.

Lösung:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= x_1 & &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -x_1 + x_2^2 + u & &= -z_2 + z_3^2 + u \\ \dot{z}_3 &= x_2^3 - x_1 x_2 + x_1 u & &= z_3^2 - z_2 z_3 + z_2 u.\end{aligned}$$

Das System ist nicht eingangsnormalisiert.

- e) Finden Sie eine Transformation so dass das transformierte System eingangsnormalisiert ist.

Lösung:

Sei

$$z_3 = \Phi_3(x_1, x_2, x_3).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \dot{x}_3 \\ &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} (-x_1 + x_2^2 + u) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} (x_2^3 - x_1 x_2 + x_1 u) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} (x_1).\end{aligned}$$

Damit u aus der Gleichung verschwindet, muss also

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} u + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} x_1 u = 0$$

gelten. Diese partielle Differentialgleichung wird zum Beispiel von

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} x_1^2 - x_2$$

gelöst. Die gesamte Transformation lautet also

$$\begin{aligned}z_1 &= x_3 \\z_2 &= x_1 \\z_3 &= \frac{1}{2} x_1^2 - x_2,\end{aligned}$$

mit der inversen Transformation

$$x_1 = z_2$$

$$x_2 = -z_3 + \frac{1}{2}x_1^2 = -z_3 + \frac{1}{2}z_2^2$$

$$x_3 = z_1.$$

Die Jacobimatrix der Abbildung ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ x_1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat also immer vollen Rang. Weil die Transformation radial unbeschränkt ist, ist sie auch global gültig. Die resultierende Differentialgleichung für z_3 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= -x_1\dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ &= x_1(-x_1 + x_2^2 + u) - x_2^3 + x_1x_2 - x_1u \\ &= -x_1^2 + x_1x_2^2 - x_2^3 + x_1x_2 \\ &= -z_2^2 + z_2\left(-z_3 + \frac{1}{2}z_2^2\right)^2 - \left(-z_3 + \frac{1}{2}z_2^2\right)^3 + z_2\left(-z_3 + \frac{1}{2}z_2^2\right). \end{aligned}$$